

Άρα $V(-3) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -k - \lambda, y = k, z = \lambda, k, \lambda \in \mathbb{R} \} =$
 $= \{ (k, -\lambda, \lambda) \in \mathbb{R}^3 : k, \lambda \in \mathbb{R} \} = \{ (-k, k, 0) + (-\lambda, 0, \lambda), k, \lambda \in \mathbb{R} \}$
 $= \{ k(-1, 1, 0) + \lambda(-1, 0, 1), k, \lambda \in \mathbb{R} \} = \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$
 αυτά τα δύο είναι γραμμικά ανεξάρτητα $\Rightarrow$ βάση του $V(-3)$
 $\dim V(-3) = 2$ πάντα $\lambda = -3$

$V(3): -4x + 2y + 2z = 0$

$2x - 4y + 2z = 0$

$2x + 2y - 4z = 0$

$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

$\dim N_T = n - r(A) = 3 - 2 = 1$ (αφού $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$)

και κάθε άλλη 3×3 ορίζουσα που $\neq 0$ των π λαμβάνει είναι ίση με το μηδέν

Άρα,

$\begin{cases} -4x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$ κρατάω τις εξισώσεις από τις οποίες έχει προέλθει η ορίζουσα.

άρα $V(3) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = k, y = k, z = k, k \in \mathbb{R} \} =$
 $= \{ (k, k, k) \in \mathbb{R}^3 : k \in \mathbb{R} \} = \{ k(1, 1, 1), k \in \mathbb{R} \} = \langle (1, 1, 1) \rangle$
 βάση

$V(-3):$ βάση $(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)$ Αφού οι ιδιοτιμές όχι απλές $\Rightarrow$ πρέπει να κάνουμε και G-S μέθοδο ώστε να κάνουμε τα διανύσματα ορθογώνια

Έλεγχος ότι είναι Γ.Α.

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\vec{y}_1 = \vec{x}_1$

$\vec{y}_2 = \vec{x}_2 - \text{Pr}_{\vec{y}_1}(\vec{x}_2)$

$\vec{y}_3 = \vec{x}_3 - \text{Pr}_{\vec{y}_1}(\vec{x}_3) - \text{Pr}_{\vec{y}_2}(\vec{x}_3)$ όπου $\text{Pr}_{\vec{y}}(\vec{x}) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \cdot \vec{y}$

Ορθογώνια : $\{ \underset{\vec{y}_1}{(1, 1, 1)}, \underset{\vec{y}_2}{(-1, 1, 0)}, \underset{\vec{y}_3}{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)} \}$

Κάνω
ορθοκανονικοποίηση
διανυσμάτων

$$\left\{ \frac{y_1'}{\|y_1'\|}, \frac{y_2'}{\|y_2'\|}, \frac{y_3'}{\|y_3'\|} \right\}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$${}^t P A P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Τετραγωνικές μορφές

Ορισμός

Θεωρούμε n -διάστατο Ευκλείδειο χώρο E να λέμε ότι $q: E \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τετραγωνική μορφή αν υπάρχει συμμετρικός πίνακας $A \in \text{Μικμ}(\mathbb{R})$ και μια ΟΚΒ του $E: q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2$ (τα x_i, x_j α συνιστώσες του $\vec{x}$) στην κανονική βάση.

$$q(\vec{x}) = 2x^2 + 5y^2 + 6z^2 + 2xy - 4xz$$

η $\circledast$ γράφεται $\underbrace{q(\vec{x}) = {}^t X A X}_{L(x_1, \dots, x_n)} \textcircled{1}$ όπου $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

αλλά A συμμετρικός $\Rightarrow \exists$ ορθογώνιος P

$$\Delta = {}^t P A P \Rightarrow \underbrace{A = P \Delta {}^t P}_{\textcircled{2}}$$

P ορθογ. $\Leftrightarrow P = {}^t P \Rightarrow \textcircled{1}, \textcircled{2} \quad q(\vec{x}) = {}^t X P \Delta {}^t P X = {}^t ({}^t P X) \Delta ({}^t P X) = {}^t Z \Delta Z$

• $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 = \dots$
 $2x^2 + 3y^2$

αναχθεί

π.χ. Να αναγνωριστεί η τετραγωνική μορφή $q(x) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz$ στους κύριους άξονες και να αναγν. η επιφάνεια

Εύρεσι πίνακα A τετρ. μορφής

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Ιδιοτιμές}$$

διυτελεστές

των τετραγώνων

$$XA = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda_1=0, \lambda_2=1, \lambda_3=3$$

(ιδιοτιμές απλές
δεν χρειάζεται 6-S μέθοδο)

$$V(0) = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix} \right\}, \quad V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \right\}, \quad V(3) = \left\{ \begin{pmatrix} -\sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/6 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & 0 & -\sqrt{6}/3 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } \xi_1, \xi_2, \xi_3 \text{ είναι οι κύριοι άξονες της } q(x')$$

$$\text{όπου } {}^t P A P = \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ και η } q(\vec{x}) \text{ στη νέα βάση έχει τη μορφή}$$

$$q(\vec{x}) = \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \lambda_3 (z')^2$$

$$\Rightarrow q(\vec{x}) = (y')^2 + 3(z')^2$$

αναγνωρίζω της $q(\vec{x}) = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} (y')^2 + 3(z')^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sum_{x=0} \frac{(y')^2}{1^2} + \frac{(z')^2}{(1/\sqrt{3})^2} = 1 \quad \rightarrow \text{Έλλειψη}$$